

27/03/17 Άσκηση: 3 (#3)

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

Πείτε το $\chi_C(x) \in \mathbb{R}[x]$ με θεωρ. Cayley-Hamilton.
 υπολογιστε $D = \underbrace{C^{23} - 3C^{22} - 4C^{21} + 10C^{20}}_F - C^6 + 3C^5 + 4C^4 - 11C^3 + 4C^2 + 5C + I_3$

$$\leadsto \chi_C(x) = \det(C - xI_3) = \begin{vmatrix} 1-x & 2 & 3 \\ -1 & -x & 4 \\ 0 & 2 & 2-x \end{vmatrix} = -x^3 + 3x^2 + 4x - 10.$$

Από Θ. Cayley-Hamilton: $\chi_C(C) = \mathbb{O}_{3 \times 3} \Rightarrow -C^3 + 3C^2 + 4C - 10I_3 = \mathbb{O}_{3 \times 3}$

Αρα $F = -C^{20} \chi_C(C) = -C^{20} \mathbb{O}_{3 \times 3} = \mathbb{O}_{3 \times 3}$
 Συνεπώς $D = \underbrace{-C^6 + 3C^5 + 4C^4 - 10C^3 - C^3 + 4C^2 + 5C + I_3}_{\text{"0235"}} = -(3C^2 + 4C - 10I_3) + 4C^2 + 5C + I_3$
 $= C^2 + C + 11I_3 = \begin{bmatrix} 11 & 10 & 20 \\ -9 & 17 & 9 \\ -9 & 6 & 25 \end{bmatrix}$

(πλ) $C^{25} - 3C^7 + 5C$. τότε $p(x) = x^{25} - 3x^7 + 5x$ με τη διαίρεση στο $\mathbb{R}[x]$
 $p(x) = \pi(x)\chi_C(x) + r(x)$ με $r(x) = 0$ ή $(r(x) \neq 0)$ $\text{deg } r(x) < 3$.

Συνεπώς $C^{25} - 3C^7 + 5C = p(C) = \pi(C)\chi_C(C) + r(C) = 0 + r(C) = r(C)$

(Συνεχίζω
 της Α. 2)

Ιδιότητα	Αλγ. πολ.	Γεν. πολ.
2	2	
b	1	1

Εύχρηστε αν 2 ιδιότητα του A
 $1 \leq \text{γεω. πολ. } \lambda \leq \text{αλγ. πολ. } \lambda$

Αρα A διαγωνίσιμος αν και μόνο αν $\dim_{\mathbb{R}} V_A(\lambda) = 2$

Υπολογισμός $V_A(a)$

$$(A - aI) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 3 & 0 & b-a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} az=0 \\ 3x+(b-a)z=0 \end{cases} \rightarrow \text{αν } (a \neq 0) \text{ τότε substit. } z=0 \Rightarrow \begin{cases} z=0 \\ 3x+(b-a)z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=0 \\ x=0 \end{cases}$$

Συνεπώς $V_A(a) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, y \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$

όρα $\boxed{\dim_{\mathbb{R}} V_A(a) = 1}$ A όχι διαγωνιστικός

$\rightarrow$ αν $(a=0)$ τότε $3x+(b-a)z=0$

Άρα $V_A(a) = \left\{ \begin{bmatrix} -\frac{(b-a)}{3}z \\ y \\ z \end{bmatrix} : y, z \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} -\frac{b-a}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$

όρα $\boxed{\dim_{\mathbb{R}} V_A(a) = 2}$ A διαγωνιστικός

6' μέρος: (Για $b \neq a$) $\exists$ πολλαπλ. $\chi_A(x) = -(x-a)^2(x-b)$

Πιθανά $m_A(x) = (x-a)(x-b)$ ή $(x-a)^2(x-b)$

A διαγωνιστικός $\Leftrightarrow m_A(x) = (x-a)(x-b) \Leftrightarrow$

$$(A - aI_3)(A - bI_3) = \mathbb{O}_{3 \times 3} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 3 & 0 & b-a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a-b & 0 & 0 \\ 0 & a-b & a \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbb{O}_{3 \times 3} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow a=0$$

Αν $\boxed{b=a}$. Τότε $\chi_A(x) = (x-a)^3$

Πιθανά $m_A(x) = x-a, (x-a)^2, (x-a)^3$

Άρα A διαγ. αν και μόνο αν $(m_A(x) = x-a)$

Ποσινόμενα αν και μόνο αν $A - aI_3 = \mathbb{O}_{3 \times 3}$

Αλλά $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 3 & 0 & a \end{bmatrix}$. Άρα $A - aI_3 \neq \mathbb{O}_{3 \times 3}$

$\forall a \in \mathbb{R}$. Συνεπώς αν $b=a \neq$ τιμή του A , ο A δεν είναι διαγ.

#4

Άσκηση: 4:

Έστω $A \in F^{n \times n}$ και $m \in \mathbb{Z}$ με $m > n$. Δείξτε ότι αν $A^m = \mathbb{O}_{n \times n}$ τότε και $A^n = \mathbb{O}_{n \times n}$.

(π.χ) αν $A \in F^{5 \times 5}$ και $A^{20} = \mathbb{O}_{5 \times 5} \Rightarrow A^5 = \mathbb{O}_{5 \times 5}$

→ Έστω $m_A(x) \in F[x]$ το ελάχιστο πολυώνυμο του A και $p(x) = x^m$. Έχουμε $p(A) = \mathbb{O}_{n \times n}$. Άρα από τον ορισμό ελαχίστου πολυώνυμου, αφού το $p(x)$ μηδενίζει τον A έχουμε ότι το $m_A(x)$ διαιρεί το x^m στο $F[x]$. Άρα υπάρχει $i \geq 1$ με $i \leq m$ ώστε $m_A(x) = x^i$. Αλλά $m_A(x)$ διαιρεί στο $F[x]$ το $\chi_A(x) \Rightarrow i \leq i \leq n$. Άρα $A^i = \mathbb{O}_{n \times n}$ για κάποιο i με $1 \leq i \leq n$. Συνεπώς $A^n = A^i \cdot A^{n-i} = \mathbb{O}_{n \times n} A^{n-i} = \mathbb{O}_{n \times n}$.

#4

Άσκηση: 2:

Έστω $v \geq 2$ και $A \in \mathbb{R}^{v \times v}$ με $A^2 = -I_v$.

Υπολογίστε το $m_A(x)$ και δείξτε ότι A οχι διαγωνίσιμος.

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

→ τέτοιου τύπου $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

→ Θετουμε $p(x) = -x^2 + 1 \in \mathbb{R}[x]$

Έχουμε $p(A) = \mathbb{O}_{v \times v}$ από υποθέση. Άρα $m_A(x)$ (που είναι μονικό βαθμ. ≥ 1) διαιρεί το $p(x)$ στο $\mathbb{R}[x]$. Αλλά $\deg p(x) = 2$ και $p(x)$ δεν έχει ρίζες στο $\mathbb{R} \Rightarrow p(x)$ αναιρέτο στο $\mathbb{R}[x]$. Άρα $m_A(x) = (x^2 + 1)$.

Αλλά το $m_A(x)$ δεν είναι στο $\mathbb{R}[x]$ γινόμενο διακεκριμένων πρωτοβαθμίων, έπεται ότι A οχι διαγων. επί του $\mathbb{R}$.

b) Έστω $v \geq 3$ πεπεσμένος. Δείξτε ότι δεν υπάρχει $A \in \mathbb{R}^{v \times v}$ με $A^2 = -I_v$.

2. Έστω ότι v περιττός και $A \in \mathbb{R}^{v \times v}$ με $A^2 = -I_v$.
Θα καταλήξουμε σε αντίφαση.

Έστω $m_A(x) \in \mathbb{R}[x]$ το ελάχιστο πολώνυμο του A και
 $\chi_A(x)$ το χαρακ. πολύνο του A .

Ξέρουμε ότι $m_A(x) = x^2 + 1$

Ξέρουμε ότι το $m_A(x)$ διαιρεί το $\chi_A(x)$ στο $\mathbb{R}[x]$
και είναι τους ίδιους αναγωγούς παράγοντες. Άρα υπάρχει
 $k \geq 1$ με $\chi_A(x) = (x^2 + 1)^k$

Επομένως, $v = \deg \chi_A(x) = 2k$. Αντίφαση αφού v περιττός

#4

Άσκηση: 3

Έστω $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ με $A^2 = I_3$

Τι συμβαίνει για τα $m_A(x)$ και $\chi_A(x)$;

Είναι ο A διαγώνιος; Είναι ο A διαγωνίσιμος;

2. Θέτουμε $p(x) = x^2 - 1 \in \mathbb{R}[x]$. Έχουμε $p_A(A) = \mathbb{O}_{3 \times 3}$
Δηλαδή το $m_A(x)$ διαιρεί το $p(x)$ στο $\mathbb{R}[x]$

Άρα αφού $p(x) = (x-1)(x+1)$, έχουμε $m_A(x) = x-1$ ή $m_A(x) = x+1$
ή $m_A(x) = (x-1)(x+1)$.

Σε κάθε περίπτωση $m_A(x)$ γινόμενο διακεκριμένων πρωτοβαθ.
άρα A διαγωνίσιμος.

περίπτωση 1) $m_A(x) = x-1$, Άρα $A - I_3 = \mathbb{O}_{3 \times 3} \Rightarrow A = I_3$

Άρα $\chi_A(x) = -(x-1)^3$ και διαγώνιος.

περίπτωση 2) $m_A(x) = x+1$. Τότε $A + I_3 = \mathbb{O}_{3 \times 3} \Rightarrow A = -I_3$

Άρα $\chi_A(x) = -(x+1)^3$ και διαγώνιος.

περίπτωση 3) $m_A(x) = (x+1)(x-1)$ και $\chi_A(x) = (x+1)^2(x-1)$

A όχι αναγκαστικά διαγώνια

πχ

ΠΑ
ΠΡΟΒΛ.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -x & -1 \\ 1 & -2-x \end{vmatrix} = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$$

(46 πόντοι max: 114.)

ΠΡΟΒΛ. 3.9) $m_A(x) = (x+1)(x-1)$ και $\chi_A(x) = -(x+1)(x-1)^2$

A ότι αναγκαστικό διαγωνίσιος

(Π.Χ)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Έως διαγωνίσιος

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 5: (#3)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{2 \times 2}$$

Βρείτε μιγαδικούς $x, y \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$ ώστε

$$x^2 = y^3 = \begin{bmatrix} -9 & 0 & 0 \\ -5 & 4 & 0 \\ -8 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

→ Εκταύξετε A

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} -9-x & 0 & 0 \\ -5 & 4-x & 0 \\ -8 & 0 & 1-x \end{vmatrix} = -(x-1)(x-4)(x-9)$$

Συνεπώς A διαγωνίσιμος επί του $\mathbb{R}$
με ιδιοτιμές $\lambda_1=1, \lambda_2=4, \lambda_3=9$.

Ιδιοδιόδοις $v_A(1), v_A(4), v_A(9)$. γράψτε τις προϋποθέσεις :

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \text{ όπου } P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Έστω $\tilde{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

τότε $\tilde{X}^2 = D \Rightarrow P\tilde{X}^2P^{-1} = PDP^{-1} = A.$

$\Rightarrow [(P\tilde{X}P^{-1})]^2 = A$

και θέτουμε $X = P\tilde{X}P^{-1}$

Έστω $\tilde{Y} = \begin{bmatrix} \sqrt[3]{1} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt[3]{4} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt[3]{9} \end{bmatrix}$

, τότε $\tilde{Y}^3 = D \Rightarrow P\tilde{Y}^3P^{-1} = A$

Θέτουμε $Y = P\tilde{Y}P^{-1}$, τότε $Y^3 = A.$